خدایا من در کلبه فقیرانه خود چیزی دارم که تو در عرش کبریایی خود نداری !

من چون تویی دارم و تو چون خود نداری . . .

پیشگفتار

یکی از دروسی که به دانشجویان رشته های مهندسی سازه, زلزله, سازه های دریایی و هیدرولیک در دوره تحصیلات تکمیلی تدریس می شود, درس دینامیک سازه ها می باشد. این درس بدون شک یکی از مهمترین دروسی است که هر مهندس سازه بایستی به آن تسلط کامل داشته باشد. تسلط بر مفاهیم بنیادی موجود در این درس علاوه بر اینکه دید مهندسی و قوه تحلیل رفتاری سازه ها را در یک مهندس جوان افزایش می دهد, از سوی دیگر توانایی طراحی سازه های پیچیده را نیز برای وی فراهم می سازد.

در طول سالیان اخیر چندین کتاب در سطح دنیا به عنوان مراجع عمده درس دینامیک سازه ها شناخته شده و در دانشگاه های مختلف تدریس می شوند. یکی از مشکلاتی که دانشجویان در مطالعه و یادگیری این درس همواره با آن درگیر هستند نبود مثال های کافی و حل سوالات این مراجع می باشد. نویسندگان با عنایت به این مساله و بر پایه تجربیات ناشی از چندین سال تدریس این درس در مراکز مختلف, در سال 1387 ویرایش اولیه کتاب حل مسائل اساسی دینامیک سازه ها را تالیف نمودند. در ویرایش اولیه مسائل ارائه شده در دو کتاب " دینامیک سازه ها , تالیف چن " و " دینامیک سازه ها, تالیف خسرو برگی " پوشش داده شده بودند. این کتاب بعد از چاپ و توزیع به شدت مورد توجه مخاطبین قرار گرفت که این مساله خود به خوبی نشان دهنده کمبود چنین کتاب هایی در سطح جامعه مهندسی و دانشگاهی کشور بود. با توجه به این مساله, نویسندگان به منظور ادای دینی هر چند اندک به جامعه دانشگاهی کشور و در ادامه مسیر فوق مشابه این کتاب را برای درس تئوری الاستیسیته با نام حل مسائل اساسی تئوری الاستیسیته تالیف نمودند. که به خواست خدا آن کتاب نیز مورد توجه و استقبال عزیزان قرار گرفت. با پیشرفت هر روزه جامعه مهندسی عمران کشور از یک سو و نواقص موجود در ویرایش اول کتاب دینامیک سازه ها از سوی دیگر, نویسندگان بر آن شدند که ویرایش دوم کتاب را تهیه نمایند. در این ویرایش, کتاب در دو بخش مورد بازبینی و تغییرات اساسی قرار گرفته است. اول در بخش محتوی و دوم در بخش کیفیت چاپ. در بخش محتوی سعی شده که تمامی نواقص و غلط های چاپی و مفهومی احتمالی که در چاپ اول وجود داشت

اصلاح شوند. که در این بخش علاوه بر نویسندگان, سرکار خانم مریم دلبخواه نیز زحمت شایانی متحمل شده اند. علاوه بر حل مسائل کتاب های چن و خسرو برگی که در ویرایش اول ارائه شده بود, بیش از 100 مساله متنوع از مراجع مختلف نیز گرداوری شد که در یک فصل به صورت پیوسته ارائه شده است. در انتهای کتاب نیز فصلی جداگانه اضافه شده که مسائل دینامیک سازه ها با کاربرد مهندسی زلزله را ارائه نموده است. در بخش چاپ نیز برخلاف ویرایش اول, کلیه نمودارها و گراف های کتاب به صورت حرفه ای رسم شده و با کیفیت بالا چاپ شده اند. با توجه به تغییرات انجام شده امید است که این کتاب بتواند بیش از گذشته مورد توجه عزیزان دانشجو و علاقه مندان قرار گیرد. در انتها لازم است از همکاری و کمک تمام عزیزانی که در این چند سال با نظرات, پیشنهادات و انتقادات سازنده خود نویسندگان را یاری و تشویق نمودند سپاسگذاری نماییم.

امیر ساعدی داریان – مرداد 1390

Amir_saedi_d@yahoo.com

فهرست

فصل اول

تعیین معادلات حرکت دستگاه های یک درجه آزادی 1

فصل دوم

ارتعاش آزاد دستگاه های یک درجه آزادی 39

فصل سوم

تحلیل دستگاه های یک درجه آزادی تحت اثر بارگذاری هارمونیکی و تناوبی 57

فصل چهارم

تحلیل دینامیکی دستگاه های یک درجه آزادی تحت اثر نیروهای ضربه ای 75

فصل پنجم

تعیین معادلات حرکت سیستم های چند درجه آزادی 105

فصل ششم

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی 189

فصل هفتم

محاسبه ماتریس میرایی 227

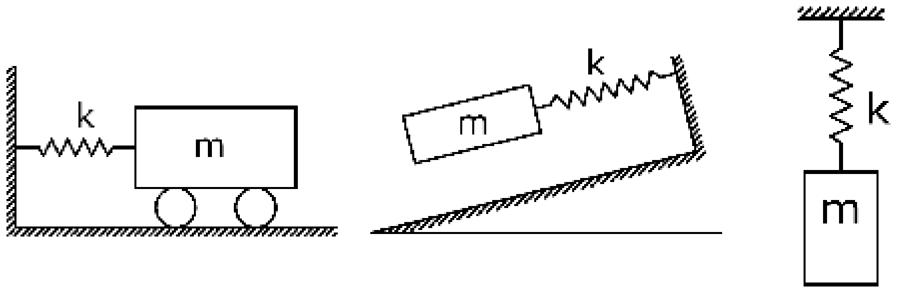
فصل هشتم

مسائل متنوع 237

فصل نهم

مهندسی زلزله 283

۱-۱) نشان دهید که معادلات حرکت دستگاه های زیر یکسان می‌باشند.



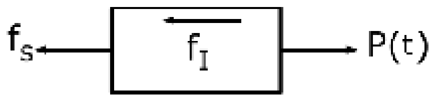
(الف) (ب) (ج)

حل :

معادله حرکت دستگاه های یک درجه آزادی بالا به صورت زیر است:

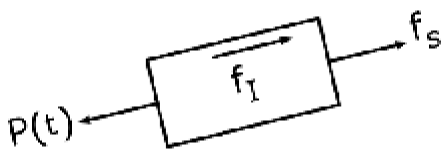
با استفاده از اصل دالامبر داریم:

الف)



$$f_I + f_D + f_s = P(t) \qquad (1)$$
$$\rightarrow m\ddot{u} + ku = P(t)$$

ب)



$$-mg\sin a + f_I + f_s = P(t)$$
$$\rightarrow u_{total} = u + u_{st}$$

می دانیم:

$$\rightarrow -mg\sin a + m\ddot{u} + k.(u + u_{st}) = P(t) \qquad (2)$$

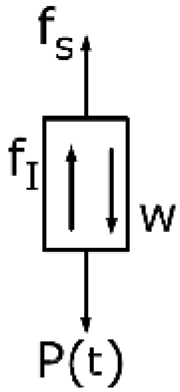
در حالت استاتیکی داریم:

$$\sum F = 0 \rightarrow -mg\sin a + ku_{st} = 0$$
$$\rightarrow ku_{st} = mg\sin a \qquad (2')$$

با جایگزینی معادله (2') در معادله (2) خواهیم داشت:

$$m\ddot{u} + ku = P(t) \qquad (3)$$

ج)



$$-w + f_I + f_s = P(t)$$
$$-w + m\ddot{u} + k(u + u_{st}) = P(t) \qquad (4)$$

در حالت استاتیکی داریم:

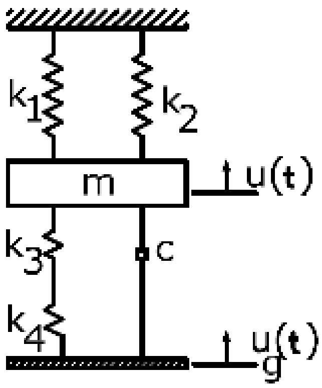
$$\sum F = 0 \quad -w + ku_{st} = 0 \qquad (4')$$

با جایگزینی رابطه (4') در رابطه (4) خواهیم داشت:

$$m\ddot{u} + ku = P(t) \qquad (5)$$

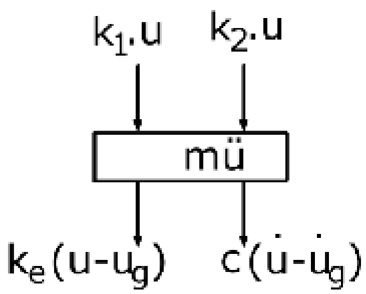
با توجه به معادلات 1و3و5 مشاهده می شود که معادلات حرکت این سه دستگاه یکسان است.

2-1) مدل ریاضی یک دستگاه یک درجه آزادی که برای اندازه گیری ارتعاشات به کار می‌رود، در شکل زیر دیده می‌شود. معادله حرکت دستگاه را به دست آورید. ug(t) حرکت ارتعاشی پایه می‌باشد.



حل :

در شکل زیر پیکره آزاد دستگاه ترسیم شده است.



سختی معادل فنرها عبارت است از:

برای فنرهای موازی: $F = k\Delta$, $F = F_1 + F_2 + \dots$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots$

$$\rightarrow k_e\Delta = k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \dots \Rightarrow k_e = k_1 + k_2 + \dots$$

برای فنرهای متوالی: $F_1 = F_2 = \dots$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots$

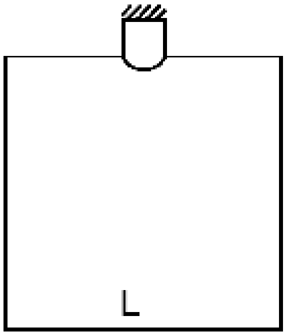
$$\rightarrow \frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} + \dots \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

با استفاده از اصل دالامبر می‌توان نوشت:

$$m\ddot{u} - c.(\dot{u} - \dot{u}g) - (k_1 + k_2)u - \frac{k_3.k_4}{k_3 + k_4}.(u - u_g) = 0$$

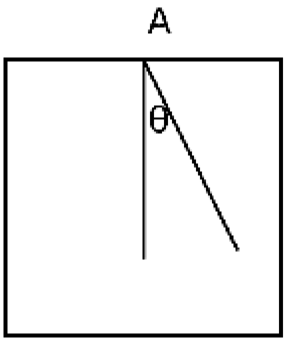
$$\rightarrow m\ddot{u} - c\dot{u} - (k_1 + k_2 + \frac{k_3.k_4}{k_3 + k_4})u = -(\frac{k_3.k_4}{k_3 + k_4}.u_g + c\dot{u}_g)$$

3-1) صفحه مربع شکل همگنی به ضلع L و جرم m در نقطه میانی یکی از اضلاع خود به تکیه گاه مفصلی متصل می‌باشد که می تواند آزادانه حول آن نقطه دوران کند. معادله حرکت صفحه را به دست آورید.



حل :

پیکره آزاد دستگاه در شکل زیر دیده می‌شود:



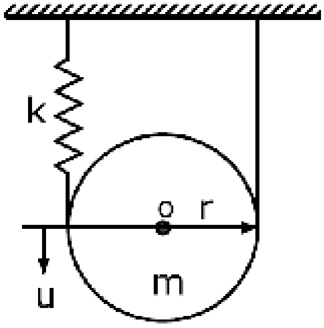
معادله تعادل برای صفحه به صورت زیر است:

$$\sum M_A = I_0.\ddot{\theta} \rightarrow w \times \frac{L}{2}\sin\theta + (\frac{1}{2}m(L^2 + L^2) + m.(\frac{L}{2})^2)\ddot{\theta} = 0$$

$$\sin\theta=\theta \qquad \rightarrow -w\frac{L}{2}\theta=\frac{5}{12}mL^2\ddot{\theta} \rightarrow mg\theta+\frac{5}{6}mL\ddot{\theta}=0$$

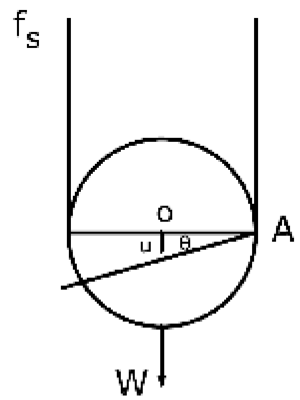
$$\rightarrow \frac{5}{6}L\ddot{\theta}+g\theta=0$$

4-1) استوانه ای به جرم m و شعاع r در شکل زیر دیده می‌شود؛ معادله حرکت آن را به دست آورید. توجه کنید که اگر نقطهO به اندازه u به طرف پایین حرکت کند، فنر به اندازه 2u کشیده می‌شود.



حل :

پیکره آزاد دستگاه در شکل زیر نشان داده شده است:



معادله تعادل برای استوانه به صورت زیر است:

$$\sum M_A = I_o\ddot{\theta} \qquad , \qquad I_G=\frac{1}{2}mr^2$$

$$-f_s.2r+(w.\cos\theta).r=(\frac{1}{2}mr^2+mr^2)\ddot{\theta}$$

$$-k\times 2r\theta_r.2r+mgr\cos\theta=\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} \quad , \qquad \cos\theta\approx 1$$

$$-4kr^2\times(\theta_{st}+\theta)+wr=\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} \qquad (1)$$

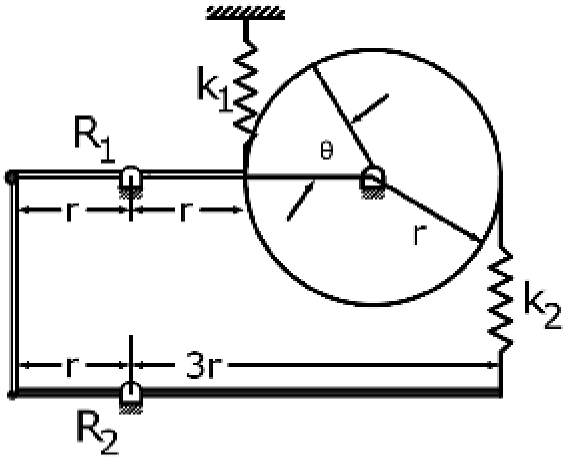
در حالت استاتیکی داریم:

$$\sum M_A=0 \qquad mgr-f_s.2r=0 \qquad \rightarrow mgr=k\times(2r\theta_{st}).2r \quad (2)$$

با جایگزینی رابطه 2 در رابطه 1 خواهیم داشت:

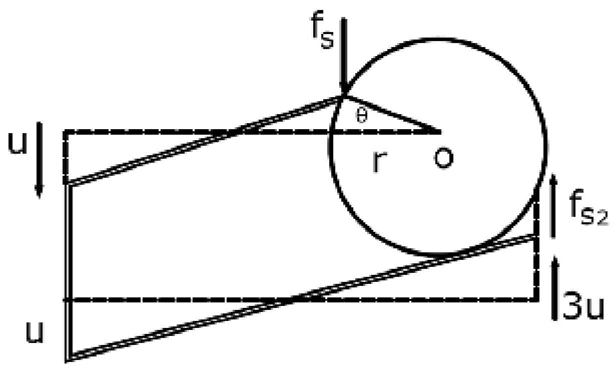
$$\frac{3}{2}m\ddot{\theta}+4k\theta=0$$

5-1) معادله حرکت دستگاه نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید. تغییر مکان ها را کوچک فرض کنید. نقاط B , A و تکیه گاه های R_1 , R_2 , O مفصلی هستند.



حل :

پیکره آزاد دستگاه در شکل زیر نشان داده شده است:



معادله تعادل برای دستگاه به صورت زیر است:

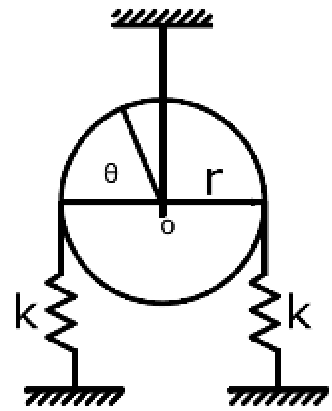
$$\sum M_o = I_G.\ddot{q} \rightarrow -k_1 ur\cos q - k_2(3u+u)r\cos q = \frac{1}{2}mr^2.\ddot{q},$$

$$u = r.\sin q \quad ,\sin q \approx q \rightarrow u = rq$$

$$\rightarrow -k_1.r^2q - k_2.4r^2q = \frac{1}{2}mr^2\ddot{q} \rightarrow \frac{1}{2}mr^2\ddot{q} + (4k_2+k_1)r^2q = 0$$

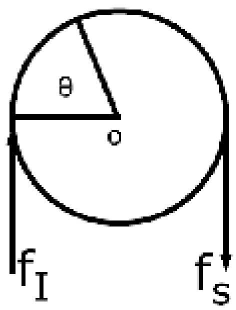
$$\Rightarrow m\ddot{q} + (8k_2+2k_1)q = 0$$

6-1) معادله حرکت دستگاه نشان داده شده در شکل زیر را برحسب زاویه دوران کوچک θ به دست آورید. جرم استوانه m و شعاع آن r می‌باشد.



حل :

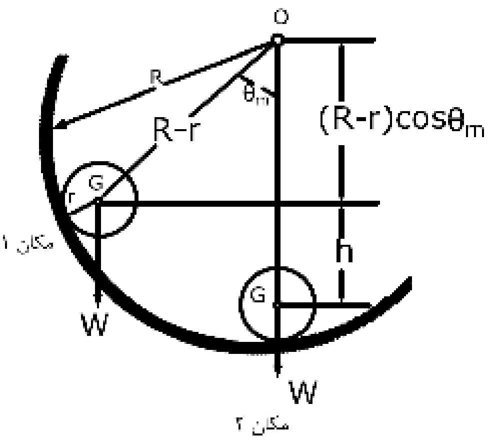
پیکره آزاد دستگاه در شکل زیر نشان داده شده است:



معادله تعادل دینامیکی برای دستگاه فوق به صورت زیر است:

$$\sum M_o = I_G \ddot{\theta}$$
$$\rightarrow -f_s.r - f_s.r = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}$$
$$\rightarrow -2kr^2\theta = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} \Rightarrow 4k\theta + m\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{4k}{m}\theta = 0$$

7-1) استوانه ای به شعاع r بدون لغزش در داخل سطح خمیده ای به شعاع R می غلتد، تناوب نوسان های کوچک استوانه را تعیین کنید.



حل:

زاویه ای که خط OG با امتداد عمودی تشکیل می دهد θ می نامیم. از آنجاییکه استوانه بدون لغزش می غلتد، می توانیم از اصل پایستاری انرژی بین مکان1 (جایی که $\theta=\theta_m$) و مکان2(جایی که $\theta=0$) استفاده کنیم.

مکان2 : چون سرعت استوانه صفر است، انرژی جنبشی در این مکان برابر صفر بوده و داریم:

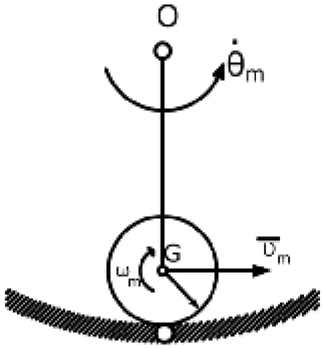
$T_1=0$

با انتخاب مبنایی مطابق شکل و نشان دادن وزن استوانه با W انرژی پتانسیل برابر است با :

$$V_1 = Wh = W(R-r)(1-\cos\theta)$$

باتوجه به اینکه برای نوسان های کوچک $(1-\cos\theta) = 2\sin^2(\theta/2) \approx \theta^2/2$ است، داریم:

$$V_1 = W(R-r)\frac{\theta_m^2}{2}$$



مکان *1*: سرعت زاویه ای خط OG را وقتی استوانه از مکان 2 عبور می کند $\dot{\theta}_m$ می نامیم و با مشاهده اینکه نقطه C مرکز آنی دورانی استوانه است، داریم :

$$\bar{v}_m = (R-r)\dot{\theta}_m \qquad \omega_m = \frac{\bar{v}_m}{r} = \frac{R-r}{r}\dot{\theta}_m$$

انرژی جنبشی :
$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_m^{\,2} + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2$$

$$= \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}_m^{\,2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^{\,2}$$

$$= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_m^{\,2}$$

انرژی پتانسیل :

$V_2=0$

پایستاری انرژی :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

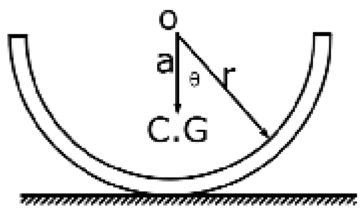
$$0 + W(R-r)\frac{\theta_m^{\,2}}{2} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}_m^{\,2} + 0$$

چون $\dot{\theta}_m = \omega\theta_m$ و W=mg داریم :

$$mg(R-r)\frac{\theta_m^{\,2}}{2} = \frac{3}{4}m(R-r)^2(\omega\theta_m)^2 \qquad \omega^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R-r}$$

$$T = \frac{2p}{w} \qquad\qquad T = 2p\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R-r}{g}}$$

8-1) در شکل زیر پوسته ای نیم دایره ای نشان داده شده است. جرم پوسته m و شعاع داخلی آن r بوده و a فاصله بین مرکز دایره O تا مرکز ثقل پوسته G می‌باشد. معادله حرکت آن را تعیین کنید. از روش انرژی استفاده نمایید.



حل:

با توجه به اینکه در سیستم، نیروی میرایی وجود ندارد، لذا دستگاه فقط تحت تاثیر نیروی لختی است و بنابراین یک دستگاه پتانسیل می‌باشد. در چنین دستگاهی انرژی کل، ثابت و مستقل از زمان است. چنانچه انرژی کل را به صورت مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل در نظر بگیریم، مطلب فوق از نظر ریاضی بدین ترتیب بیان می‌شود :

$$(K.E + P.E) = C \rightarrow \frac{d}{dt}(K.E + P.E) = 0 \qquad (1)$$

در رابطه بالا انرژی جنبشی با K.E نشان داده شده است.

$$K.E = \frac{1}{2}.I_G.\dot{q}^2$$

$$P.E = mga.(1 - Cosq)$$

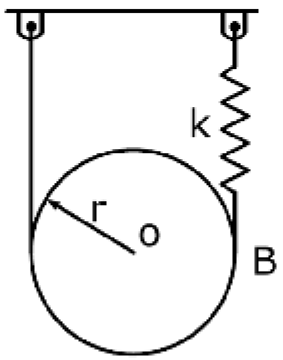
با استفاده از رابطه (1) می توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.I_G.\dot{q}^2 + mga(1-\cos q)\right) = 0$$

$$\Rightarrow I_G.\dot{q}\ddot{q} + mga\sin q \times \dot{q} = 0 \qquad \sin q \approx q$$

$$\rightarrow I_G.\ddot{q} + mgaq = 0$$

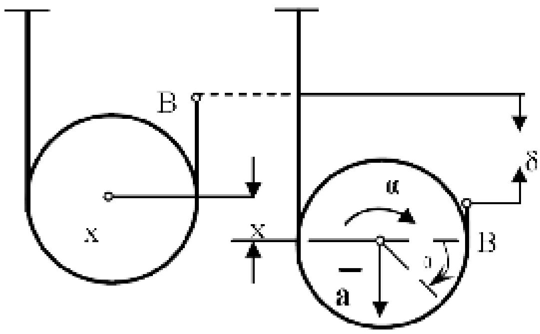
9-1) استوانه ای به جرم m و شعاع r را با طنابی حلقه ای مطابق شکل آویزان کرده اند، یک طرف طناب مستقیما به تکیه گاهی صلب متصل است و طرف دیگر آن به فنری به ضریب ثابت k آویزان است، تناوب و بسامد ارتعاش استوانه را معین کنید.



حل:

سینماتیک حرکت : جابجایی خطی و شتاب استوانه را بر حسب جابجایی زاویه ای θ بیان می کنیم. جهت مثبت حرکت را ساعتگرد و سطح مبنا را وضعیت تعادل سیستم در نظر می گیریم.

$$\bar{x} = r\theta \qquad d = 2\bar{x} = 2r\theta$$
$$\alpha = \ddot{\theta} \qquad \bar{a} = r\alpha = r\ddot{\theta} \qquad \bar{a} = r\ddot{\theta}\downarrow \tag{1}$$

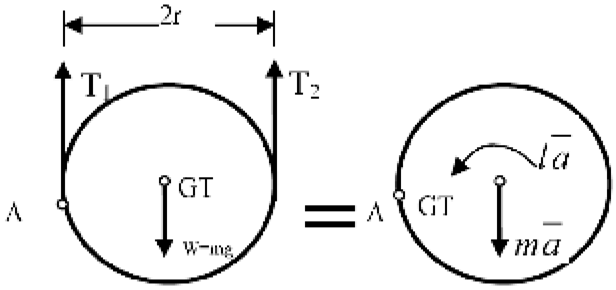


معادله های حرکت : سیستم نیروهای خارجی وارد بر استوانه شامل وزن W و نیروهای T_2, T_1 است که توسط طناب به آن اعمال می گردد. می گوییم که این سیستم معادل است با سیستم نیروهای موثر، که با بردار ma متصل به نقطه G وکوپل Iα نشان داده می شود.

$$+\downarrow \sum M_A = \sum \left(M_A\right)_{\text{موثر}} : \qquad mgr - T_2(2r) = m\bar{a}r + I\alpha \tag{2}$$

وقتی استوانه در حالت تعادل است، کشش در طناب $T_0=W/2$ است. یادآور می شویم که به ازای جابجایی زاویه ای θ مقدار T_2 برابر است با :

$$T_2=T_0+kd=\frac{1}{2}W+kd=\frac{1}{2}mg+k(2rq) \qquad (3)$$



با جایگزینی از رابطه های (1) و (3) در (2) و یادآوری اینکه $I=mr^2/2$ داریم :

$$mgr-\left(\frac{1}{2}mg+2krq\right)(2r)=m(r\ddot{q})r+\frac{1}{2}mr^2\ddot{q}$$

$$\ddot{q}+\frac{8}{3}\frac{k}{m}q=0$$

دیده می شود که معادله بالا معادله حرکت نوسانی ساده است و داریم :

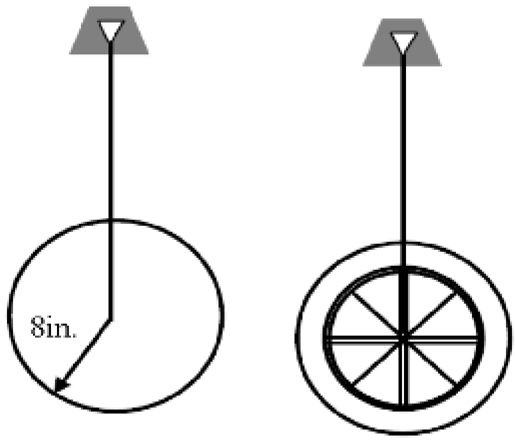
$$w^2=\frac{8}{3}\frac{k}{m} \qquad w=\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

$$T=\frac{2p}{w} \qquad T=2p\sqrt{\frac{3m}{8k}} \quad \text{ü}$$

$$f=\frac{w}{2p} \qquad f=\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

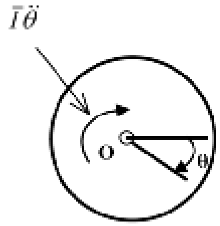
10-1) دیسکی دایره ای شکل به وزن 20 lb و شعاع 8 in را از سیمی مطابق شکل آویزان کرده اند. ابتدا دیسک را می چرخانند (در نتیجه سیم نیز می پیچد) وسپس رها می سازند، تناوب ارتعاش پیچشی 1/13 s است. چرخ دنده ای از همان سیم آویزان کرده اند، تناوب ارتعاش پیچشی چرخ دنده برابر با 1/93 s است. فرض می کنیم که گشتاور کوپلی که سیم وارد می کند، با زاویه پیچشی متناسب باشد. معین کنید: (الف) ثابت فنر پیچشی سیم را، (ب)

گشتاور لختی چرخ دنده را نسبت به محور مرکزواری آن و(ج) هنگامی که چرخ دنده به اندازه 90 درجه چرخانده وسپس رها می شود، حداکثر سرعت زاویه ای آن چقدر است.



حل:

(الف) *ارتعاش دیسک* : جابجایی زاویه ای را θ می نامیم و می گوییم که مقدار کوپلی که سیم به دیسک وارد می کند، برابر M=Kθ است که k ثابت فنر پیچشی سیم است. از آنجاییکه این کوپل باید با کوپل Ia نشان دهنده نیروهای موثر دیسک معادل باشد، داریم:



$$a = q$$

$$+\uparrow \sum M_O = \sum \left(M_O\right)_{\text{موثر}}:$$

$$\ddot{q}+\frac{K}{I}q = 0$$

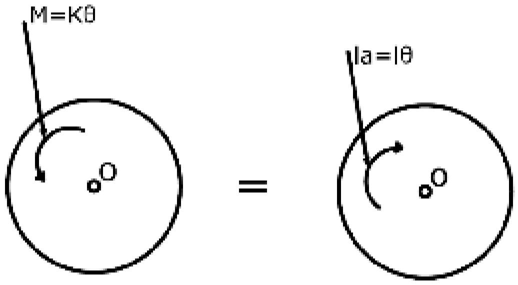
دیده می شود که حرکت نوسانی ساده است و داریم :

$$w^2 = \frac{K}{I} \qquad T = \frac{2p}{w} \qquad T = 2p\sqrt{\frac{I}{K}} \qquad (۱)$$

برای دیسک داریم :

$$T = 1.13s \qquad \bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20lb}{32.2\,ft/s^2}\right)\left(\frac{8}{12}\,ft\right)^2 = 0.138\ lb.ft.s^2$$

با جایگزینی در رابطه 1 نتیجه می شود :



$$1.13 = 2p\sqrt{\frac{0.138}{K}} \qquad K = 4.27lb.ft/rad \quad \text{ü}$$

(ب) *ارتعاش چرخ دنده* : از آنجا که تناوب ارتعاش چرخ دنده برابر s 1/93 است K= 4/27 از معادله (1) نتیجه می شود :

$$1.93 = 2p\sqrt{\frac{\bar{I}}{4.27}} \qquad \bar{I} = 0.4030lb.ft.s^2 \quad \text{ü}$$

(ج) *حداکثر سرعت زاویه ای چرخ دنده* : چون حرکت نوسانی ساده است، داریم :

$$q = q_m \sin wt \qquad \Phi = q_m w \cos wt \qquad \Phi_m = q_m w$$

باتوجه به اینکه q_m =90 °=1/571 rad و T =1/93s بنابراین داریم :

$$\Phi_m = q_m w = q_m\left(\frac{2p}{T}\right) = (1.571rad)\left(\frac{2p}{1.93s}\right)$$

$$w_m = 5.11rad/s \quad \text{ü}$$

11-1) معادله حرکت دستگاه نشان داده شده در شکل زیر را به دست آورید.